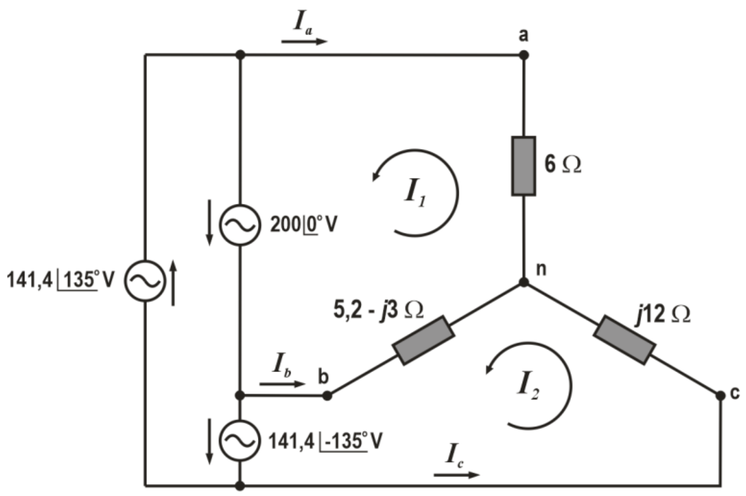
Análise de Circuitos Trifásicos Desequilibrados Utilizando-se Componentes Simétricas

Prof. José Rubens Macedo Jr.

Exercício: Uma determinada carga trifásica, ligada em estrela flutuante, é alimentada pelas seguintes tensões de linha: V_{ab} = $200\angle 0^{o}$ V; V_{bc} = $141,4\angle -135^{o}$ V e V_{ca} = $141,4\angle 135^{o}$ V. Sabendo-se que as impedânicas da carga são Z_{an} = 6 Ω, Z_{bn} = (5,2 - j3,0) Ω e Z_{cn} = j12 Ω, calcule as correntes de linha ***I**a*, ***I**b* e ***I**c* utilizando-se: (a) correntes de malha e (b) componentes simétricas.

a) SOLUÇÃO 1 – Método das correntes de malha



Para a ***malha 1***:

$$6\dot{I}_1 + (5,2 - j3)\dot{I}_1 - (5,2 - j3)\dot{I}_2 - 200\measuredangle 0^0 = 0$$
$$(11,2 - j3)\dot{I}_1 - (5,2 - j3)\dot{I}_2 = 200\measuredangle 0^0$$

Para a ***malha 2***:

$$(5,2 - j3)\dot{I}_2 + j12\dot{I}_2 - (5,2 - j3)\dot{I}_1 - 141,4\measuredangle -135^0 = 0$$
$$-(5,2 - j3)\dot{I}_1 + (5,2 + j9)\dot{I}_2 = 141,4\measuredangle -135^0$$

Tendo-se, assim, o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} 11,2 - j3 & -(5,2 - j3) \\ -(5,2 - j3) & 5,2 + j9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200\measuredangle 0^0 \\ 141,4\measuredangle -135^0 \end{bmatrix}$$

Resultando em:

$$\dot{I}_1 = 11,87\measuredangle 22,07^0\,A$$

$$\dot{I}_2 = 10,94\measuredangle -164,98^0\,A$$

Assim, finalmente tem-se:

$$\dot{I}_a = \dot{I}_1 = 11,87\measuredangle 22,07^0\,A$$
$$\dot{I}_b = \dot{I}_2 - \dot{I}_1 = 22,77\measuredangle -161,31^0\,A \qquad \rightarrow$$
$$\dot{I}_c = -\dot{I}_2 = 10,94\measuredangle 15,02^0\,A$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{I}_a &= 11,87\measuredangle 22,07^0\,A \\ \dot{I}_b &= 22,77\measuredangle -161,31^0\,A \\ \dot{I}_c &= 10,94\measuredangle 15,02^0\,A \end{aligned}}$$

b) SOLUÇÃO 2 – Método das componentes simétricas

As tensões de linha da fonte em termos de suas componentes simétricas são as seguintes:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_0 \\ \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{V}_{ab} \\ \dot{V}_{bc} \\ \dot{V}_{ca} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 200\measuredangle 0^0 \\ 141,4\measuredangle -135^0 \\ 141,4\measuredangle 135^0 \end{bmatrix}$$

Resultando em:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_0 \\ \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 157,72\measuredangle 0^0 \\ 42,27\measuredangle 0^0 \end{bmatrix} V$$

De tal forma que:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{ab} \\ \dot{V}_{bc} \\ \dot{V}_{ca} \end{bmatrix} = \dot{V}_0\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \dot{V}_1\begin{bmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{bmatrix} + \dot{V}_2\begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 157,72\measuredangle 0^0\begin{bmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{bmatrix} + 42,27\measuredangle 0^0\begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{bmatrix}$$

Portanto:

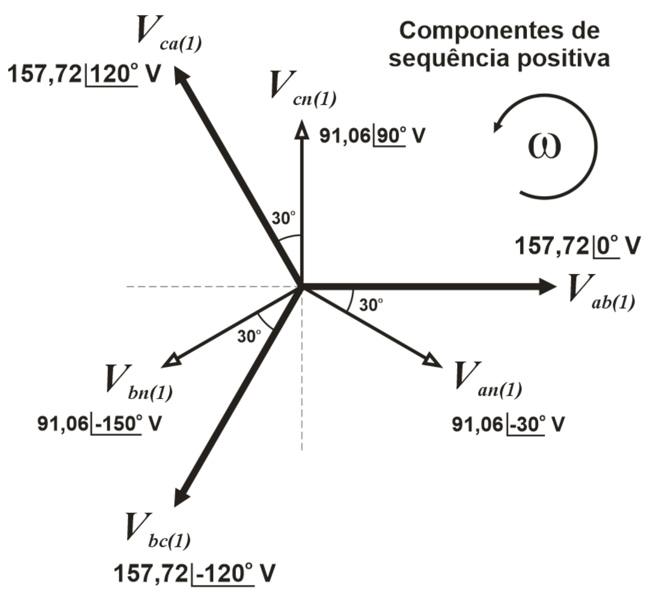
$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{ab} \\ \dot{V}_{bc} \\ \dot{V}_{ca} \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} + \boxed{\begin{bmatrix} 157,72\measuredangle 0^0 \\ 157,72\measuredangle -120^0 \\ 157,72\measuredangle 120^0 \end{bmatrix}} + \boxed{\begin{bmatrix} 42,27\measuredangle 0^0 \\ 42,27\measuredangle 120^0 \\ 42,27\measuredangle -120^0 \end{bmatrix}}$$

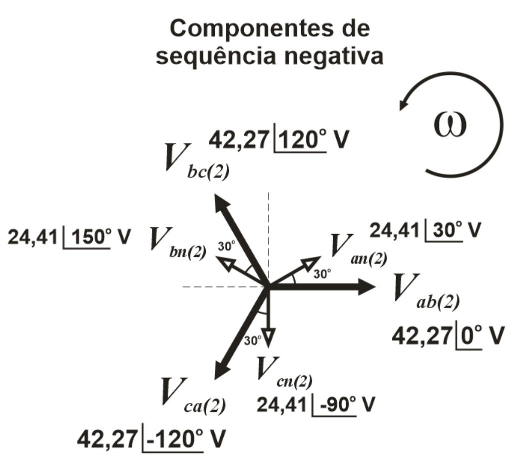
Sistema de tensões de sequência **zero**

Sistema de tensões de sequência **positiva**

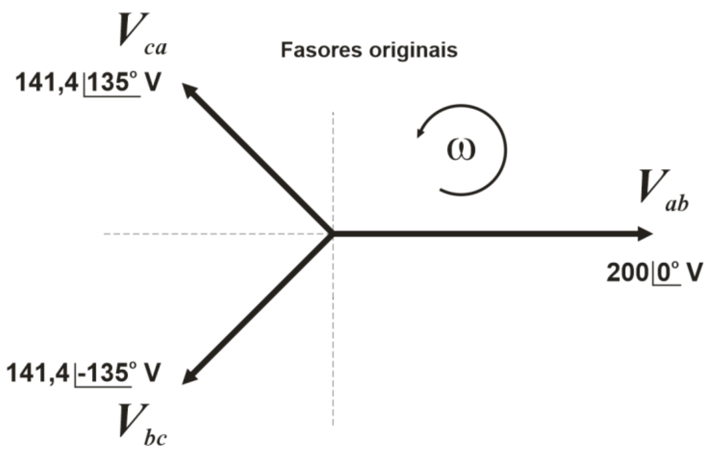
Sistema de tensões de sequência **negativa**

Em termos fasoriais, considerando-se a inexistência de componentes de sequência zero das tensões de linha, tem-se:





Sendo que neste caso a composição fasorial dos sistemas de sequência negativa e positiva para tensões de linha, resultam nos fasores originais, conforme abaixo:



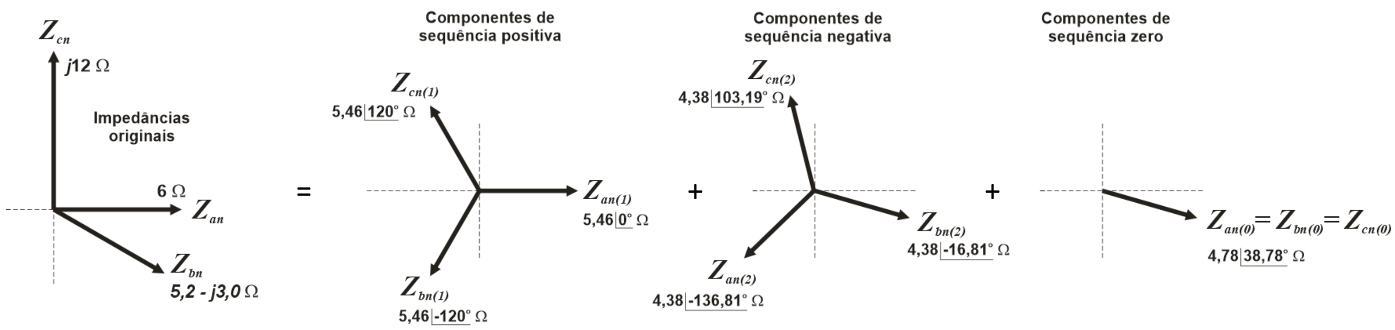
As impedâncias da carga expressas em termos de suas componentes simétricas são as seguintes:

$$\begin{bmatrix} Z_0 \\ Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z_{an} \\ Z_{bn} \\ Z_{cn} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 5,2 - j3 \\ j12 \end{bmatrix}$$

Resultando em:

$$\begin{bmatrix} Z_0 \\ Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,78\measuredangle 38,78^0 \\ 5,46\measuredangle 0^0 \\ 4,38\measuredangle -136,81^0 \end{bmatrix}\Omega$$

É importante ressaltar que impedâncias não são fasores, mas podem ser representadas vetorialmente, conforme abaixo:



Lembrando-se que:

$$\begin{bmatrix} Z_{an} \\ Z_{bn} \\ Z_{cn} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4,78\measuredangle 38,78^0 \\ 4,78\measuredangle 38,78^0 \\ 4,78\measuredangle 38,78^0 \end{bmatrix}}_{\text{Impedâncias de sequência } \textbf{zero}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 5,46\measuredangle 0^0 \\ 5,46\measuredangle -120^0 \\ 5,46\measuredangle 120^0 \end{bmatrix}}_{\text{Impedâncias de sequência } \textbf{positiva}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 4,38\measuredangle -136,81^0 \\ 4,38\measuredangle -16,81^0 \\ 4,38\measuredangle 103,19^0 \end{bmatrix}}_{\text{Impedâncias de sequência } \textbf{negativa}}$$

A partir das tensões de sequência, assim como das impedâncias de sequêncis, pode-se realizar o cálculo das correntes de linha da seguinte forma:

Para a ***fase A***:

$$\dot{V}_{an} = \dot{I}_a Z_{an} = \left(\dot{I}_{a(0)} + \dot{I}_{a(1)} + \dot{I}_{a(2)}\right)\left(Z_{an(0)} + Z_{an(1)} + Z_{an(2)}\right)$$

Ou ainda,

$$\dot{V}_{an(0)} + \dot{V}_{an(1)} + \dot{V}_{an(2)} = \left(\dot{I}_{a(0)} + \dot{I}_{a(1)} + \dot{I}_{a(2)}\right)\left(Z_{an(0)} + Z_{an(1)} + Z_{an(2)}\right)$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_{an(0)} + \dot{V}_{an(1)} + \dot{V}_{an(2)} = {} & \dot{I}_{a(1)} Z_{an(1)} + \dot{I}_{a(1)} Z_{an(2)} + \dot{I}_{a(1)} Z_{an(0)} + \\ & \dot{I}_{a(2)} Z_{an(1)} + \dot{I}_{a(2)} Z_{an(2)} + \dot{I}_{a(2)} Z_{an(0)} + \\ & \dot{I}_{a(0)} Z_{an(1)} + \dot{I}_{a(0)} Z_{an(2)} + \dot{I}_{a(0)} Z_{an(0)}\end{aligned}$$

Pela regra da sequência, tem-se que "**a ordem do sistema de tensão à qual uma queda *IZ* pertence é igual à soma das ordens dos sistemas aos quais *I* e *Z* pertencem individualmente**".

Dessa forma, pode-se afirmar que:

$\dot{V}_{an(1)} = \dot{I}_{a(1)} Z_{an(0)} + \dot{I}_{a(2)} Z_{an(2)} + \dot{I}_{a(0)} Z_{an(1)}$, pois (1) + (0) = ordem 1, (2) + (2) = 4 = ordem 1 e (0) + (1) = ordem 1

$\dot{V}_{an(2)} = \dot{I}_{a(1)} Z_{an(1)} + \dot{I}_{a(2)} Z_{an(0)} + \dot{I}_{a(0)} Z_{an(2)}$, pois (1) + (1) = ordem 2, (2) + (0) = 2 = ordem 1 e (0) + (2) = ordem 2

$\dot{V}_{an(0)} = \dot{I}_{a(1)} Z_{an(2)} + \dot{I}_{a(2)} Z_{an(1)} + \dot{I}_{a(0)} Z_{an(0)}$, pois (1) + (2) = 3 = ordem 0, (2) + (1) = 3 = ordem 0 e (0) + (0) = ordem 0

Adicionalmente, considerando-se que $I_0 = 0$ (ligação em estrela flutuante), as equações anteriores podem ser simplicadas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{an(1)} &= \dot{I}_{a(1)} Z_{an(0)} + \dot{I}_{a(2)} Z_{an(2)} \\ \dot{V}_{an(2)} &= \dot{I}_{a(1)} Z_{an(1)} + \dot{I}_{a(2)} Z_{an(0)} \\ \dot{V}_{an(0)} &= \dot{I}_{a(1)} Z_{an(2)} + \dot{I}_{a(2)} Z_{an(1)}\end{aligned}$$

Para o cálculo de $I_{a(1)}$ e $I_{a(2)}$ bastam apenas as duas primeiras equações acima. E sabendo-se que (ver diagramas fasoriais das tensões de sequência),

$$\dot{V}_{an(1)} = \frac{157,72}{\sqrt{3}} \measuredangle 0^0 - 30^0 = 91,06 \measuredangle -30^0 \ V$$

$$\dot{V}_{an(2)} = \frac{42,27}{\sqrt{3}} \measuredangle 0^0 + 30^0 = 24,40 \measuredangle 30^0 \ V$$

Resulta:

$$\begin{bmatrix} Z_{an(0)} & Z_{an(2)} \\ Z_{an(1)} & Z_{an(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_{a(1)} \\ \dot{I}_{a(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_{an(1)} \\ \dot{V}_{an(2)} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{I}_{a(1)} \\ \dot{I}_{a(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10,99 \measuredangle -39,87^0 \\ 11,81 \measuredangle 77,41^0 \end{bmatrix} A$$

Assim, tem-se finalmente que: $\dot{I}_a = \dot{I}_{a(1)} + \dot{I}_{a(2)} \Rightarrow \boxed{\dot{I}_a = 11,89 \measuredangle 22,15^0 \, A}$

Para a ***fase B***:

$$\dot{V}_{bn} = \dot{I}_b Z_{bn} = \left(\dot{I}_{b(0)} + \dot{I}_{b(1)} + \dot{I}_{b(2)}\right)\left(Z_{bn(0)} + Z_{bn(1)} + Z_{bn(2)}\right)$$

Ou ainda,

$$\dot{V}_{bn(0)} + \dot{V}_{bn(1)} + \dot{V}_{bn(2)} = \left(\dot{I}_{b(0)} + \dot{I}_{b(1)} + \dot{I}_{b(2)}\right)\left(Z_{bn(0)} + Z_{bn(1)} + Z_{bn(2)}\right)$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_{bn(0)} + \dot{V}_{bn(1)} + \dot{V}_{bn(2)} = {} & \dot{I}_{b(1)}Z_{bn(1)} + \dot{I}_{b(1)}Z_{bn(2)} + \dot{I}_{b(1)}Z_{bn(0)} + \\ & \dot{I}_{b(2)}Z_{bn(1)} + \dot{I}_{b(2)}Z_{bn(2)} + \dot{I}_{b(2)}Z_{bn(0)} + \\ & \dot{I}_{b(0)}Z_{bn(1)} + \dot{I}_{b(0)}Z_{bn(2)} + \dot{I}_{b(0)}Z_{bn(0)}\end{aligned}$$

Pela regra da sequência, tem-se que "**a ordem do sistema de tensão à qual uma queda *IZ* pertence é igual à soma das ordens dos sistemas aos quais *I* e *Z* pertencem individualmente**".

Dessa forma, pode-se afirmar que:

$\dot{V}_{bn(1)} = \dot{I}_{b(1)}Z_{bn(0)} + \dot{I}_{b(2)}Z_{bn(2)} + \dot{I}_{bn(0)}Z_{bn(1)}$, pois (1) + (0) = ordem 1, (2) + (2) = 4 = ordem 1 e (0) + (1) = ordem 1

$\dot{V}_{bn(2)} = \dot{I}_{b(1)}Z_{bn(1)} + \dot{I}_{b(2)}Z_{bn(0)} + \dot{I}_{b(0)}Z_{bn(2)}$, pois (1) + (1) = ordem 2, (2) + (0) = 2 = ordem 1 e (0) + (2) = ordem 2

$\dot{V}_{bn(0)} = \dot{I}_{b(1)}Z_{bn(2)} + \dot{I}_{b(2)}Z_{bn(1)} + \dot{I}_{b(0)}Z_{bn(0)}$, pois (1) + (2) = 3 = ordem 0, (2) + (1) = 3 = ordem 0 e (0) + (0) = ordem 0

Adicionalmente, considerando-se que $I_0 = 0$ (ligação em estrela flutuante), as equações anteriores podem ser simplicadas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{bn(1)} &= \dot{I}_{b(1)}Z_{bn(0)} + \dot{I}_{b(2)}Z_{bn(2)} \\ \dot{V}_{bn(2)} &= \dot{I}_{b(1)}Z_{bn(1)} + \dot{I}_{b(2)}Z_{bn(0)} \\ \dot{V}_{bn(0)} &= \dot{I}_{b(1)}Z_{bn(2)} + \dot{I}_{b(2)}Z_{bn(1)}\end{aligned}$$

Para o cálculo de $I_{b(1)}$ e $I_{b(2)}$ bastam apenas as duas primeiras equações acima. E sabendo-se que (ver diagramas fasoriais das tensões de sequência),

$$\dot{V}_{bn(1)} = \frac{157,72}{\sqrt{3}}\measuredangle -120^0 - 30^0 = 91,06\measuredangle -150^0 \ V$$

$$\dot{V}_{bn(2)} = \frac{42,27}{\sqrt{3}}\measuredangle 120^0 + 30^0 = 24,40\measuredangle 150^0 \ V$$

Resulta:

$$\begin{bmatrix} Z_{bn(0)} & Z_{bn(2)} \\ Z_{bn(1)} & Z_{bn(0)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{I}_{b(1)} \\ \dot{I}_{b(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_{bn(1)} \\ \dot{V}_{bn(2)} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \dot{I}_{b(1)} \\ \dot{I}_{b(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10,99\measuredangle -159,87^0 \\ 11,81\measuredangle -162,59^0 \end{bmatrix} A$$

Assim, tem-se finalmente que: $\dot{I}_b = \dot{I}_{b(1)} + \dot{I}_{b(2)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{I}_b = 22,79\measuredangle -161,28^0 \, A}$

Para a ***fase C***:

$$\dot{V}_{cn} = \dot{I}_c Z_{cn} = \left(\dot{I}_{c(0)} + \dot{I}_{c(1)} + \dot{I}_{c(2)}\right)\left(Z_{cn(0)} + Z_{cn(1)} + Z_{cn(2)}\right)$$

Ou ainda,

$$\dot{V}_{cn(0)} + \dot{V}_{cn(1)} + \dot{V}_{cn(2)} = \left(\dot{I}_{c(0)} + \dot{I}_{c(1)} + \dot{I}_{c(2)}\right)\left(Z_{cn(0)} + Z_{cn(1)} + Z_{cn(2)}\right)$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_{cn(0)} + \dot{V}_{cn(1)} + \dot{V}_{cn(2)} = {} & \dot{I}_{c(1)} Z_{cn(1)} + \dot{I}_{c(1)} Z_{cn(2)} + \dot{I}_{c(1)} Z_{cn(0)} + \\ & \dot{I}_{c(2)} Z_{cn(1)} + \dot{I}_{c(2)} Z_{cn(2)} + \dot{I}_{c(2)} Z_{cn(0)} + \\ & \dot{I}_{c(0)} Z_{cn(1)} + \dot{I}_{c(0)} Z_{cn(2)} + \dot{I}_{c(0)} Z_{cn(0)}\end{aligned}$$

Pela regra da sequência, tem-se que "**a ordem do sistema de tensão à qual uma queda *IZ* pertence é igual à soma das ordens dos sistemas aos quais *I* e *Z* pertencem individualmente**".

Dessa forma, pode-se afirmar que:

$\dot{V}_{cn(1)} = \dot{I}_{c(1)} Z_{cn(0)} + \dot{I}_{c(2)} Z_{cn(2)} + \dot{I}_{cn(0)} Z_{cn(1)}$, pois (1) + (0) = ordem 1, (2) + (2) = 4 = ordem 1 e (0) + (1) = ordem 1

$\dot{V}_{cn(2)} = \dot{I}_{c(1)} Z_{cn(1)} + \dot{I}_{c(2)} Z_{cn(0)} + \dot{I}_{c(0)} Z_{cn(2)}$, pois (1) + (1) = ordem 2, (2) + (0) = 2 = ordem 1 e (0) + (2) = ordem 2

$\dot{V}_{cn(0)} = \dot{I}_{c(1)} Z_{cn(2)} + \dot{I}_{c(2)} Z_{cn(1)} + \dot{I}_{c(0)} Z_{cn(0)}$, pois (1) + (2) = 3 = ordem 0, (2) + (1) = 3 = ordem 0 e (0) + (0) = ordem 0

Adicionalmente, considerando-se que $I_0 = 0$ (ligação em estrela flutuante), as equações anteriores podem ser simplicadas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\dot{V}_{cn(1)} &= \dot{I}_{c(1)} Z_{cn(0)} + \dot{I}_{c(2)} Z_{cn(2)} \\ \dot{V}_{cn(2)} &= \dot{I}_{c(1)} Z_{cn(1)} + \dot{I}_{c(2)} Z_{cn(0)} \\ \dot{V}_{cn(0)} &= \dot{I}_{c(1)} Z_{cn(2)} + \dot{I}_{c(2)} Z_{cn(1)}\end{aligned}$$

Para o cálculo de $I_{b(1)}$ e $I_{b(2)}$ bastam apenas as duas primeiras equações acima. E sabendo-se que (ver diagramas fasoriais das tensões de sequência),

$$\dot{V}_{cn(1)} = \frac{157,72}{\sqrt{3}} \measuredangle 120^0 - 30^0 = 91,06 \measuredangle 90^0 \ V$$

$$\dot{V}_{bn(2)} = \frac{42,27}{\sqrt{3}} \measuredangle -120^0 + 30^0 = 24,40 \measuredangle -90^0 \ V$$

Resulta:

$$\begin{bmatrix} Z_{cn(0)} & Z_{cn(2)} \\ Z_{cn(1)} & Z_{cn(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_{c(1)} \\ \dot{I}_{c(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_{cn(1)} \\ \dot{V}_{cn(2)} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{I}_{c(1)} \\ \dot{I}_{c(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10,99 \measuredangle 80,13^0 \\ 11,81 \measuredangle -42,59^0 \end{bmatrix} A$$

Assim, tem-se finalmente que: $\dot{I}_c = \dot{I}_{c(1)} + \dot{I}_{c(2)} \Rightarrow \boxed{\dot{I}_c = 10,95 \measuredangle 15^0 \, A}$